Avanzados - día 2

Invariantes

Problema 1. Considera un tablero de $(2n-1) \times (2n-1)$. Si quitamos una casilla, el resto se puede teselar con fixas de 2×1. Encuentre todas las posibles posiciones de esa casilla.

Problema 2. En un tablero de 9×9 se colocan 65 insectos, cada uno en el centro de una casilla. Lo insectos empiezan a caminar todos al mismo tiempo y a la misma velocidad, en dirección de alguna casilla vecina a la que están. Al llegar al centro de otra casilla. Todos giran 90 grados (a la derecha o a la izquierda) y siguen avanzando. Demuestra que en algún momento hay dos insectos en la misma casilla.

Problema 3. ¿Con cuales piezas de tetris es posible cubrir un tablero de 10×10? En una cubierta solo se permite usar un tipo de piezas.

Problema 4. (Putnam 2006) Pedro y Naicolette juegan por turnos a quitar cerillos de un montón. En cada turno, la cantidad de cerillos que quitan debe ser de la forma $p-1$ para algún primo p. Quién quite el último cerillo gana. Pedro juega primero, y hay n cerillos al principio del juego. Demuestra que la cantidad de valores n para los cuáles Naicolette tiene estrategia ganadora es infita.

Problema 5. (Lista corta IMO 2001) Un tablero de $2n-1 \times 2n-1$ se va a cubrir con piezas L de 3 casillas, cuadrados de 2×2 o piezas S de 4 casillas. Demuestra que se requieren al menos $4n-1$ piezas del primer tipo.

Problema 6. (Putnam 2019) Le llamamos $\mathbb{Z}^n$ al conjunto de n-adas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ done $a_1, \ldots, a_n$ son enteros. Decimos que dos n-adas son *vecinas* si solo tienen una entrada distinta y su diferencia es 1. Encuentra todos los posibles valores de $n \geq 1$ para los cuales existe un subconjunto de $\mathbb{Z}^n$ de tal forma que

- si p está en S, ninguno de los vecinos de p está en S y
- si p no está en S, extactamente uno de los vecinos de p está en S.

Problema 7. Demuestra que un tablero de $a \times b$ se puede cubrir con piezas de $1 \times n$ si y solo si n divide a al menos uno de a o b.

Problema 8. (OMM 199) Un polígono ortogonal es un cuyos ángulos son todos de 90 o 270 grados, sin agujeros. Demuestra que un polígono ortogonal cuyos lados son todos enteros impares no se puede teselar con piezas de 2×1.

Problema 9. Encuentra todos los valores de a, b tal que es posible cubrir un tablero de $a \times b$ con piezas S de 4 casillas de tal forma que cada casilla está cubierta por la misma cantidad de piezas. (en este problema se permite que las piezas se sobrelapen y reflejar las piezas)

Problema 10. (Lista corta ibero 2009) En cada casilla de una cuadrícula de 8×8 hay una lámpara. Se permite elegir cualquier casilla y una dirección (horizontal o vertical) y cambiar el estado de esa lámpara y sus vecinas en la dirección elegida. Inicialmente todas las lámparas están apagadas. Despues de varios movimientos exactamente una lámpara está prendida. Encuentra todas las posiciones posibles de esta lámpara.

Problema 11. (OMM 2003) Dados un número n, un cambio *sensato* es remplazarlo por $2n+1$ o por $3n+2$. Decimos que dos números n y m son *compatibles* si existe una sucesión de cambios sensatos que llevan a ambos números al mismo resultado. Encuentra todos los número menores a 2003 que son compatibles con 2003.

Problema 12. (Rumania 2007) Las casillas de un tablero de $n \times n$ se pintan de rojo o azul. Tres de las esquinas son rojas y la otra azul. Demuestra que podemos encontrar un cuadrado de 2×2 con una cantidad impar de casillas azules.

Problema 13. (Vietnam 1993) Un tablero de 1993×2000 se cubre con cuadrados de 2×2, con piezas S de 2×2 y con piezas formadas por agregarle un bloque de 1×1 a un cuadrado de 2×2. Sea s la cantidad total de piezas de los primeros dos tipos que se usaron. Encuentra el mayor valor posible de S.

Problema 14. (Argentina 2009) Las casillas de un tablero de $a \times b$ se colorean de blanco y negro como ajedrez. Se permite agarrar dos casillas que comparten un lado y cambiar sus colores de la siguiente forma: las casillas blancas se pintan de negro, las negras se pintan de verde y las verdes se pintan de blanco (inicialmente no hay casillas verdes pero empiezan a aparecer después de la primera coloración. Encontrar todos los valores de a, b para los cuales es posible que al final todas las casillas blancas al principio queden negras y todas las casillas negras al principio queden blancas.

Problema 15. (USAMO 1999) A y B juegan por turnos a escribir letras en las casillas de un tablero de 2000×1